Paul Levyの遺したもの (数学史の研究)

飛田, 武幸

数理解析研究所講究録
1195巻 2001年 74-79

Paul Lévy の遺したもの

飛田　武幸
Takeyuki Hida
Nagoya University (Professor Emeritus)

自伝より

P. Lévy の数学における業績を歴史として眺め、今に残されているものを探りたい。彼の著書11冊（版を重ねたものもある）は周知であり、全集6巻も刊行されている（残念ながらここに漏れている興味深い論文も数多い）が、それらを網羅することは至難である。始めの試みとして今回は 次の三つの自伝をとりあげる。

I Notice sur les Travaux Scientifiques. Hermann & C ie, 1935. 86ページからなる。

汎関数の解析、確率論およびその他の分野における本人の業績を説明する。
本文は三つの章よりなる。

第一章　汎関数解析

1910 - 1922: この頃の汎関数の微分、汎関数微分方程式の積分可能性、Hadamard 方程式などの変分問題とその発展、汎関数の解析、Laplacian (今日 Lévy Laplacian と呼ばれる), 抽象空間における確率法則。その他における成果を概観する。

注意すべき事柄として、汎関数の変分に関する Volterra form の一般化、変分方程式の積分可能条件（変数の複素化で holomorphic なものになおす等)、グリーン関数についての Hadamard equation を

$$\delta U(A,B) = -\frac{1}{2\pi}\int_C U(A,M)\,U(M,B)\,\delta n(s)ds,$$

に変形したときの一般化があるが具体的なものに根ざした論調には説得力がある。

Laplacian の定義

$$\Delta U = lim \frac{1}{n} \sum_{1}^{n} \frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2}$$

のために、$L^2([0,1])$ の完全正規直交系の選び方（順序も含め、またégalement dense な系が適していることなどの注意もある）や, それが 2 階微分作用素の単なる和ではなくて**平均**であることを強調する。そして、和の取り方に関連して、次の作用素との対応も論じている.

$$\Delta_1 U = \int_0^1 (U'_x)^2 dt.$$

また Laplacian の表現について、曲面 S を指定したとき, そこにおける Laplacian は

$$\Delta U = \Delta_s U - K\frac{\partial U}{\partial n}$$

となることを示している。ここに $\Delta_s U$ は U の S 上の値で定まり; $\frac{\partial U}{\partial n}$ は法線微分、 K は平均曲率である。この話は、1951 年の関数解析の著書でも取り上げられており（第三部 62 節）現代風の（例えばホワイトノイズ解析の言葉での）問題設定が望まれる。S がホワイトノイズ超汎関数の決める曲面であれば好都合なことである。

その他定積分を積分領域に関する完全加法的な汎関数とする認識に立って、1919 年の講義「抽象集合上の確率法則」において、確率測度が完全加法性を充たし $L^2([0,1])$ の単位球を基礎の空間とする確率空間を定義しようとする試みを述べている。ルベーグ測度が普及して間もない頃であることに注目したい。確率論で極限定理を扱おうとすれば、ごく自然な展開であったと思われる。

真に無限次元的な解析の強調が随所に見られる。ここでも必然的におこる確率測度の完全加法性を要求するが、特に現在に生きる多くの問題の指摘が見うけられて興味深い。Lévy によるこの方面の研究は、何故か一応 1920 年代で中断しているが、その後、1951 年の著書および最晩年 1971 年のソビエトにおける科学史学会に提出された論文で変分が復活していることは注目に値する。

第二章　確率論

1919 年に、Ecole Polytechnique で、主任の Carvallo 教授から急に確率論の講義を依頼されたときの逸話から始まる (Lévy 生誕 100 年記念セミナーにおける L. Schwartz の講演記録も参照されたい)。既成の確率論の勉強をして講義の準備をするのは時間が不足であるが、自分で retrouver することなら出来ると。自信の程がうかがわれる。

ここでは確率法則の研究に、基本的かつ強力な方法として、**特性関数** の導入をした背景が述べられ、それが中心極限定理に適用されていて興味深い（1930 年代の仕事)。少し

遡って 1920 年代の誤差論、可算確率論の中に重複大数の法則、無限分解可能な法則など我々の周知する事実の歴史的な話題が続く。さらに、1929-30 年 の頃の数論の話では zeta function　にまで及んでいる。

「註」有名な加法過程の分解の話はここには現れず、1937 年の著書の大きなテーマになっている。

第三章　種々の問題

この章に意外に多くのページを割いていて（26 ページ、全体の３分の１）彼の博学を知らされる。項目をあげよう。

1. 幾何学

lycée の時代から von Koch の曲線のような特徴のある曲線に興味を持ち 1930 年代にまで続いている。これらは 1970 年の自伝に詳しい。

2. 算術 (arithmétique)，確率法則の算術である。
3. 級数、関数項の級数
4. １変数増加関数の理論
5. 解析関数

別に長編の論文がある（Journal de mathématiques pure et appliquées. 1921-22.) が、全集に漏れているのが惜しまれる。

6. Green 関数と Neumann 関数

学位論文を含めて、その前後に発表されたもので、当時の興味はここにウエイトがあったことが伺われる。Hadamard の影響も大きかったようだ。

7. Riemann の意味での一般化された微分と synbolic calculus。
8. 積分方程式
9. 科学哲学の諸問題

確率論，相対論、宇宙論の他、Rev. de métaphysique et de morale 誌の 2 篇の論文（これも全集漏れ）の説明もしている。

10. 教育の問題

4 ページにわたる熱心な論説がある。

II Nouvelle notice sur les travaux scientifique de M. Paul Lévy Janvier 1964.

1964 年 1 月に発表された Lévy の業績の自己紹介である。因みに、この年の春に彼は Hadamard のあとをついで Academy 会員に推挙されている。

Lévy はこの紹介は1935　年の報告（上の 1)）に続くもので、1919 年から 1963 年までの、主として確率論についての仕事の紹介であるとしている。

1. 古典確率論

1919 年の確率論の基礎についての講演を思い出し、分布関数や特性関数の話、極限定理と安定な法則についての議論、Lévy-Cramér の定理の故事などを回想している。

2. 可算確率論

0-1 law (Kolmogorov に priority), Lévy-Cramér の定理など。

3. 確率過程

a). X(t) について Lévy は Doob とは異なる観点に立つと主張していることに注意したい。すなわち確率過程については「偶然の引き続いた関与の効果による関数の連続的構造の研究」が目標であるという。

[註]　Lévy の立場から自然に stochastic infinitesimal equation (1953, Univ. of Calif. Pub. ではじめて登場した）へ、そして確率過程に対する innovation approach　へとつながる。我々はこの方向を重視すべきである。

b). 加法過程と無限分解可能な法則。Lévy 分解（Lévy-Ito 分解）は確率解析の基礎である。各点独立超過程としての認識、ホワイトノイズ超汎関数としての反映、場の理論への応用など、多くの重要な課題が遺されている。

c). ブラウン運動。重要さは言うまでもない。それが基本的であることの特性、見本関数の性質、ブラウン運動から導かれる確率過程、その汎関数の解析、解析が真に無限次元的であること；多次元値の場合など、発見あるいは再発見されるべきことは限りなく多い。

d). N 次元パラメータをもつブラウン運動。Lévy が晩年に最も重要性を強調したところである。このブラウン運動について、さらに新しい多くのランダム性のあり方が見出されるであろう。今後の最も稔り多い研究対象である。

e). ガウス過程（の表現)。上の a) の立場から重要性を再認識する必要が一層深まってきた。

f). マルコフ過程。

4. 確率法則の算術

5. 種々の仕事

a). 関数解析。

1935 年の Notice に譲る．なお Hadamard は 1928 年の Bologne（ボローニア）での講演で Lévy の仕事を高く評価した。
b). 幾何学。Plateau　の問題など。
c). 積分方程式
E. Picard の方程式に対する貢献がある。
d). その他。フーリエ級数。 card shuffling の問題も扱っているが、他に応用されているようである。

III Quelques aspects de la pensée d'un mathématicien, 1970. A. Blanchard.　邦訳 **「一確率論研究者の回想」** 1973.

序文に「私はこの建物の一つの階を築いた。これを他の人たちで続けてほしい」と述べている。この期待に添うのは大変なことである!

この書物は、訳書もあるので、解説あるいは書評がましいことは避けたい。章のタイトルと気付くところを少し述べてみよう。

第１部　数学者としての自叙伝

第１章　修学時代、初期の仕事
第２章　関数解析と積分方程式
汎関数の微分あるいは変分についての考察は、ホワイトノイズ解析と対比するとき、多くの示唆がえられる。その比較は、ホワイトノイズ超汎関数に、Laplace 変換と類似の、いわゆる S 変換を施すことにより、古典的な汎関数に移すことによって得られる。気がつけば、意外なところに今日に生きる Lévy の遺産を見出すことができる。
第３章　確率論
確率論における極限定理についての記述は、特に現時点において、読み返して参考にしたいものである。
第４章　確率過程、Brown 運動および　Markov 過程
この章は、Lévy の「確率過程と Brown 運動」1965 年刊行の増補第２版と併せて読むと、注意すべきところに気付くであろう。熟読したい章でえある。

第２部　私の哲学的思考の発展
哲学だからといって敬遠しないでフォローしたい。とくに第７章の「確率論の基礎」には教えられるところが多い。

時間的な順序からいえば、戻ることになるが、Lévy の学位論文 "Sur les équations intégro-différentielles définissant des fonctions de lignes" は現時点で、ホワイトノイズ解析を、特に確率場の変分を意識しながら、読みたい文献である。紹介は別な機会を待ちたい。

Lévy の遺産は

2000 Mathematics Subject classification **60H40 White Noise Theory**

に及んでいる。

終わり

、